DM de mathématiques n°4

– Corrigé

Exercice 1 — Une paramétrisation du cercle unité de $\mathbb{R}^2$

On note $\mathcal{C}$ les points de $\mathbb{R}^2$ qui sont sur le cercle unité (cercle de centre l'origine et de rayon 1), c'est-à-dire :

$$\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 = 1\right\}$$

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par :

$$\varphi(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$$

On pose enfin

$$\Gamma = \left\{\varphi(t) \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$$

Dans un premier temps, l'objectif est de comparer les ensembles Γ et $\mathcal{C}$.

1) Montrer que $\Gamma \subset \mathcal{C}$, puis que $(-1,0) \notin \Gamma$.

Soit $(x,y) \in \Gamma$. Montrons que $(x,y) \in \mathcal{C}$, i.e. que $x^2+y^2 = 1$. Comme $(x,y) \in \Gamma$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 \\ &= \frac{1-2t^2+t^4}{1+2t^2+t^4} + \frac{4t^2}{1+2t^2+t^4} \\ &= \frac{1+2t^2+t^4}{1+2t^2+t^4} = 1 \end{aligned}$$

Donc $(x,y) \in \mathcal{C}$. Ainsi, $\Gamma \subset \mathcal{C}$. Supposons par l'absurde que $(-1,0) \in \Gamma$, alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} (-1,0) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) &\iff \begin{cases} -1 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ 0 = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -1-t^2 = 1-t^2 \\ 0 = 2t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} t = 0 \\ -1 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

La seconde ligne est absurde. Contradiction. Donc $(-1,0) \notin \Gamma$.

2) Soit $(x,y) \in \mathcal{C}$ tel que $(x,y) \neq (-1,0)$. Les deux sous-questions qui suivent montrent le même résultat par deux approches différentes :

a) On pose $t = \dfrac{y}{1+x}$. Montrer que $1+t^2 = \dfrac{2}{1+x}$, puis que $\varphi(t) = (x,y)$.

On a

$$\begin{aligned} 1+t^2 &= 1 + \frac{y^2}{1+x^2+2x} \\ &= 1 + \frac{1-x^2}{1+x^2+2x} \\ &= \frac{2+2x}{1+x^2+2x} \\ &= \boxed{\frac{2}{1+x}} \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a donc

$$1-t^2 = 2-(1+t^2) = 2 - \frac{2}{1+x} = \frac{2x}{1+x}$$

Ainsi,

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{\frac{2x}{1+x}}{\frac{2}{1+x}} = \frac{2x}{2} = x$$

et

$$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\frac{y}{1+x}}{\frac{2}{1+x}} = \frac{2y}{2} = y$$

On trouve donc bien que $\boxed{\varphi(t) = (x,y)}$.

b) Justifier qu'il existe $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$ tel que $(x,y) = (\cos\theta, \sin\theta)$.

En déduire avec des formules trigonométriques qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(t) = (x, y)$.

On pose $z = x + iy$. Comme $(x, y) \neq (-1, 0)$, on a $z \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$. En particulier, comme $z \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $z = e^{i\theta}$. Enfin, on a $\theta \neq \pi$ car $z \neq -1$. En définitive, il existe $\theta \in]-\pi, \pi[$ tel que

$$z = e^{i\theta} \implies x + iy = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$\implies \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

Posons $\theta' = \dfrac{\theta}{2} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On a alors (formules d'angle moitié)

$$\cos\theta = \cos(2\theta') = \frac{1 - \tan^2\theta'}{1 + \tan^2\theta'}$$

$$\sin\theta = \sin(2\theta') = \frac{2\tan\theta'}{1 + \tan^2\theta'}$$

Ainsi, en posant $t = \tan^2\theta'$, on a bien

$$\varphi(t) = (\cos\theta, \sin\theta) = (x, y)$$

3) Déduire des questions précédentes que $\Gamma = \mathcal{C} \setminus \{(-1, 0)\}$.

On raisonne par double inclusion.

- Soit $(x, y) \in \Gamma$. Par la question 1, on a $(x, y) \in \mathcal{C}$ et $(x, y) \neq (-1, 0)$, donc $(x, y) \in \mathcal{C} \setminus \{(-1, 0)\}$. D'où $\Gamma \subset \mathcal{C} \setminus \{(-1, 0)\}$.
- Soit $(x, y) \in \mathcal{C} \setminus \{(-1, 0)\}$. Par la question 2, on a $(x, y) = \varphi(t)$ avec $t = \dfrac{y}{1 + x}$. Ainsi, $(x, y) \in \Gamma$. D'où $\mathcal{C} \setminus \{(-1, 0)\} \subset \Gamma$.

Finalement, on a bien $\Gamma = \mathcal{C} \setminus \{(-1, 0)\}$.

4) À l'aide de la question 3, montrer que

$$\left\{ \frac{2t}{1 + t^2} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} = [-1, 1]$$

On raisonne par double inclusion. On pose $A = \left\{ \dfrac{2t}{1 + t^2} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$.

- Soit $y \in [-1, 1]$. Montrons que $y \in A$. On pose $x = \sqrt{1 - y^2}$, de sorte que $x^2 + y^2 = 1$. On a donc $(x, y) \in \mathcal{C}$. De plus, $x > 0$ donc $(x, y) \neq (-1, 0)$. Ainsi, $(x, y) \in \Gamma$ par la question précédente. Par suite, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y) = \varphi(t)$, et donc en particulier $y = \dfrac{2t}{1 + t^2}$. On a donc $y \in A$. D'où $[-1, 1] \subset A$.
- Soit $y \in A$. Montrons que $y \in [-1, 1]$, i.e. $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Comme $y \in A$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $y = \dfrac{2t}{1 + t^2}$. Or, si on pose $x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$, on a donc $(x, y) = \varphi(t)$. Ainsi, $(x, y) \in \Gamma$. Par suite, $(x, y) \in \mathcal{C} \setminus \{(-1, 0)\}$. En particulier, on a $x^2 + y^2 = 1$. On en déduit que $y^2 \leqslant 1 - x^2 \leqslant 1$. Cela entraine que $|y| \leqslant 1$, donc $-1 \leqslant y \leqslant 1$. D'où $A \subset [-1, 1]$.

  (Note : on aurait pu aussi démontrer que $\dfrac{2t}{1 + t^2} \in [-1, 1]$*)*

Finalement, $A = [-1, 1]$.

5) Retrouver ce résultat en étudiant les variations de la fonction $f : t \mapsto \dfrac{2t}{1 + t^2}$.

On remarque que

$$\left\{ \frac{2t}{1 + t^2} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ f(t) \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} = f(\mathbb{R})$$

Il suffit donc de déterminer $f(\mathbb{R})$.

f est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction rationnelle. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(t) = \frac{2(1 + t^2) - 2t \times 2t}{(1 + t^2)^2} = \frac{2 - 2t^2}{(1 + t^2)^2}$$

Ainsi,

$$f'(t) \geqslant 0 \iff 2 \geq 2t^2$$
$$\iff t^2 \leqslant 1$$
$$\iff |t| \leqslant 1$$

t	$-\infty$ $\quad -1$	$-1 \quad 1$	$1 \quad +\infty$
$f'(t)$	$-$	$+$	$-$
$f(t)$	$0 \searrow -1$	$-1 \nearrow 1$	$1 \searrow 0$

Justifions la limite en $+\infty$: pour tout $t > 0$,

$$\frac{2t}{1 + t^2} = \frac{t \times 2}{t^2\left(\frac{1}{t^2} + 1\right)} = \frac{1}{t} \times \frac{2}{1 + \frac{1}{t^2}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \times 2 = 0$$

Et de même pour la limite en $-\infty$. On lit sur le tableau que

$$f(\mathbb{R}) = \boxed{[-1, 1]}$$